Vorlesung 9a

Markovketten

Teil 4

Erwartete Treffzeiten

(Buch S. 105-106)

Sei X eine Markovkette mit Zustandsraum S

und Übergangsmatrix P.

Für eine Teilmenge $D \subset S$ ist

$$T_D := \min\{n : n \geq 0, X_n \in D\}$$

die erste Treffzeit von D.

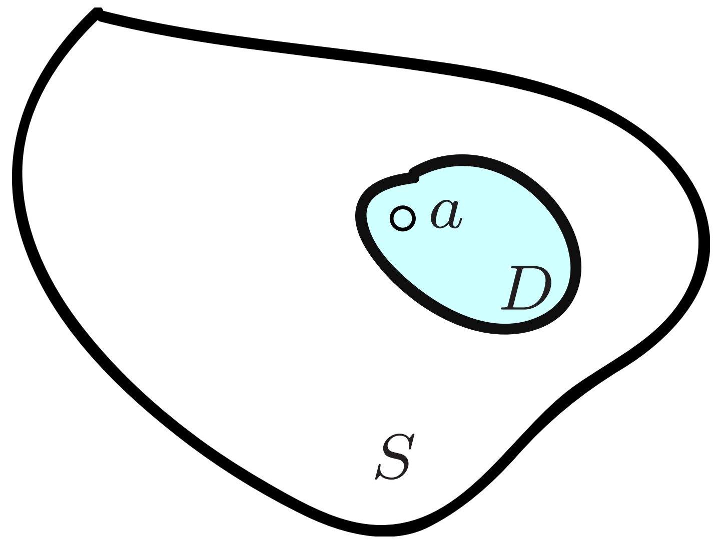
Es geht um die Berechnung von $\mathbf{E}_a[T_D]$:

Für $a \in D$

ist $\mathbf{P}_a(T_D = 0) = 1$,

also

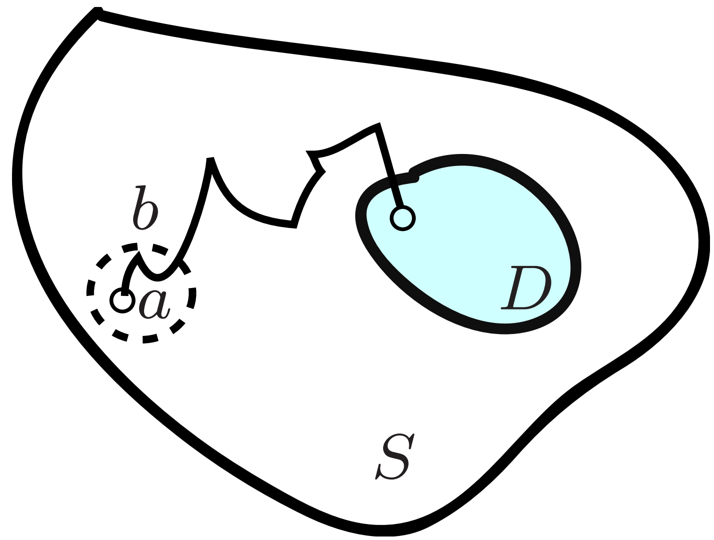
$\mathbf{E}_a[T_D] = 0$.



Für $a \notin D$:

Zerlegung von $\mathbf{E}_a[T_D]$

nach dem ersten Schritt:



Erst ein Schritt

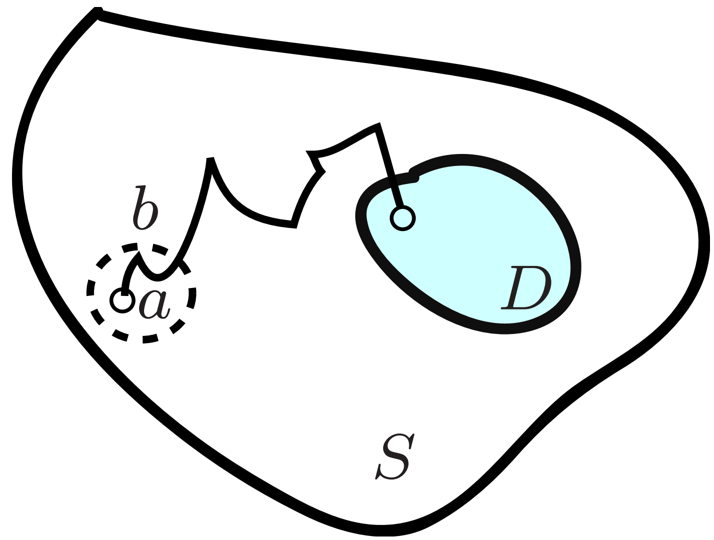
von a nach b gemäß $P(a,b)$,

dann "Neustart" in b:

$$\mathbf{E}_a[T_D] = 1 + \sum_{b \in S} P(a,b)\, \mathbf{E}_b[T_D]$$

(Formales Argument hierfür: siehe Buch Seite 106)

Fazit:



$a \mapsto e(a) := \mathbf{E}_a[T_D]$ erfüllt das Gleichungssystem

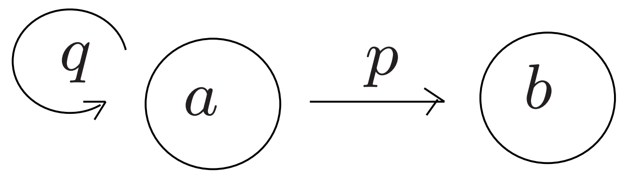
$$e(a) = 1 + \sum_{b \in S} P(a,b)\, e(b) \quad \text{für } a \notin D,$$

$$e(a) = 0 \quad \text{für } a \in D.$$

Beispiel 1:

Erwartete Zeit bis zum ersten Erfolg.

$S = \{a, b\}$



$$\mathbf{E}_a[T_b] = 1 + q\mathbf{E}_a[T_b] + p\mathbf{E}_b[T_b] \ .$$

Wegen $\mathbf{E}_b[T_b] = 0$ wird dies gelöst durch

$$\mathbf{E}_a[T_b] = 1/p.$$

Beispiel 2:

Einfache Irrfahrt auf den ganzen Zahlen: $\mathbf{E}_0[T_1] = ?$

Zerlegung nach dem ersten Schritt:

$$\mathbf{E}_0[T_1] = 1 + \tfrac{1}{2}0 + \tfrac{1}{2}\mathbf{E}_{-1}[T_1]$$

Andererseits gilt:

$$\mathbf{E}_{-1}[T_1] = \mathbf{E}_{-1}[T_0] + \mathbf{E}_0[T_1] = 2\mathbf{E}_0[T_1]$$

Zusammen: $\mathbf{E}_0[T_1] = 1 + \mathbf{E}_0[T_1]$,

mit der Lösung $\mathbf{E}_0[T_1] = \infty$.